COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU”
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ROMÂNIA
1918-2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a XIII-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018
CLASA a VII-a

Subiectul 1.

a) Fie numerele naturale nenule *a* şi *b* cu $a < b$. Demonstrați că $b - a \geq d$, unde *d* reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor *a* şi *b* .

b) Demonstrați că oricare ar fi numerele naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_{2018}$ cu proprietatea $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2018}$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \cdots + \frac{1}{[a_{2017}, a_{2018}]} \leq \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2018}},$$

unde $[\, a, b \,]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor *a* şi *b*.

Subiectul 2.

Determinaţi numerele raţionale *x, y, z* care satisfac simultan relaţiile :
$y + z = |x| - 2;\ \ z + x = |y| + 1;\ \ x + y = |z| + 3.$

Subiectul 3.

Se dă pătratul *ABCD*. Fie punctele *E* , *F* mijloacele laturilor [*AB*], respectiv [*BC*], şi punctul *M* intersecţia dreptelor *CE* şi *DF*. Arătați că :

a) $CE \perp DF$;

b) $[AD] \equiv [AM]$.

Subiectul 4.

Fie paralelogramul $ABCD$ cu unghiul A ascuţit. Pe laturile paralelogramului $ABCD$ se construiesc în exterior pătratele ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 şi DAA_1D_2 .

a) Arătați că patrulaterele AA_1CC_1 şi $A_1B_2C_1D_2$ sunt paralelograme ale căror centre coincid cu centrul paralelogramului *ABCD* ;

b) Arătați că patrulaterul format de centrele pătratelor ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 şi DAA_1D_2 este un pătrat.

Notă:

1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

COLEGIUL NATIONAL VASILE LUCACIU

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a XIII-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018
BAREM DE CORECTARE CLASA A VII-A

Subiectul 1.

a) Fie numerele naturale nenule a şi b cu $a < b$. Demonstraţi că $b - a \geq d$, unde d reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b .

b) Demonstraţi că oricare ar fi numerele naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_{2018}$ cu proprietatea $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2018}$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \cdots + \frac{1}{[a_{2017}, a_{2018}]} \leq \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2018}},$$

unde $[\,a, b\,]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

Soluție:

a) $(a, b) = d \Rightarrow a = d \cdot a'$ și $b = d \cdot b'$, cu $(a', b') = 1$ **1p**

$a < b \Rightarrow a' < b' \Rightarrow b' - a' \geq 1$ **1p**

$b - a = d(b' - a') \geq d \cdot 1$ **1p**

b) $(a, b) = \frac{a \cdot b}{[a.b]}$ **1p**

$b - a \geq (a, b) \Rightarrow b - a \geq \frac{a \cdot b}{[a,b]} \Rightarrow \frac{1}{[a,b]} \leq \frac{b-a}{a \cdot b}$ **1p**

$\frac{1}{[a,b]} \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ **1p**

$\frac{1}{[a_1,a_2]} + \frac{1}{[a_2,a_3]} + \ldots + \frac{1}{[a_{2017},a_{2018}]} \leq \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2017}} - \frac{1}{a_{2018}} \leq$

$\frac{1}{[a_1,a_2]} + \frac{1}{[a_2,a_3]} + \ldots + \frac{1}{[a_{2017},a_{2018}]} \leq \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2018}}$ **1p**

Subiectul 2.

Determinaţi numerele raţionale x, y, z care satisfac simultan relaţiile :

$$y + z = |x| - 2; \quad z + x = |y| + 1; \quad x + y = |z| + 3.$$

Soluție:

$x + y + z = |z| + 3 + z = |z| + z + 3 \geq 0 + 3$ **1p**

$x + y + z = x + |x| - 2$ **1p**

$x + |x| - 2 \geq 3 \Rightarrow x + |x| \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$ **1p**

$x + y + z = y + |y| + 1$ **1p**

$y + |y| + 1 \geq 3 \Rightarrow y + |y| \geq 2 \Rightarrow y \geq 1$ **1p**

$x + z = y + 1$ și $y + z = x - 2 \Rightarrow x - y = 1 - z = z + 2 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$ **1p**

$x - y = \frac{3}{2}; x + y = |z| + 3 \Rightarrow x + y = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ și $y = 1$ **1p**

Subiectul 3.

Se dă pătratul $ABCD$. Fie punctele E , F mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[BC]$, și punctul M intersecţia dreptelor CE şi DF. Arătați că :

a) $CE \perp DF$;

b) $[AD] \equiv [AM]$.

Soluție:

a) 4 puncte

$\Delta EBC \equiv \Delta FCD$

$\widehat{ECB} \equiv \widehat{FDC}$

$m(\widehat{MDC}) + m(\widehat{MCD}) = m(\widehat{MDC}) + 90^\circ - m(\widehat{MCB}) = 90^\circ$

$m(\widehat{DMC}) = 90^\circ => CE \perp DF$

b) Fie N mijlocul laturii (CD) => $AECN$ este paralelogram **1p**

$AN \parallel CE$, $MN= \frac{DC}{2}$, $[MN]$ este mediană în ΔCMD **1p**

$MN=\frac{AB}{2} = AE \Longrightarrow AEMN$ este trapez isoscel

$[AD] \equiv [AM]$ **1p**

Subiectul 4.

Fie paralelogramul $ABCD$ cu unghiul A ascuţit. Pe laturile paralelogramului $ABCD$ se construiesc în exterior pătratele ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 şi DAA_1D_2 .

a) Arătați că patrulaterele AA_1CC_1 şi $A_1B_2C_1D_2$ sunt paralelograme ale căror centre coincid cu centrul paralelogramului $ABCD$;

b) Arătați că patrulaterul format de centrele pătratelor ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 şi DAA_1D_2 este un pătrat.

Soluție:

a) $CC_1 \perp BC, BC||AD => CC_1 \perp AD$

$AA_1 \perp AD => CC_1 || AA_1$

$CC_1 = BC = AD = AA_1 \Longrightarrow CC_1AA_1$ este paralelogram cu centrul mijlocul diagonalei [AC] **1p**

$A_1D_2 || AD$, $AD \parallel BC$, $BC \parallel B_2C_1 \Longrightarrow A_1D_2 \parallel B_2C_1$ **1p**

$A_1D_2 = AD = BC = B_2C_1 \Longrightarrow A_1D_2B_2C_1$ este paralelogram cu centrul mijlocul diagonalei $[A_1C_1]$ **1p**

b) Fie E, F, G, H centrele pătratelor $ABA_2B_1, BCC_1B_2, CDD_1C_2, DAA_1D_2$.

Mijlocul segmentului $[A_2C_2]$ este centrul paralelogramului $ABCD$, deci coincide cu mijlocul lui $[A_1C_1]$ => $A_1C_2C_1A_2$ este paralelogram. **1p**

$[GH]$ este linie mijlocie în ΔA_1C_2D

$[EF]$ este linie mijlocie în ΔA_2C_1B => $EFGH$ este paralelogram **1p**

$\Delta A_1C_2D \equiv \Delta D_1B_2C \Longrightarrow (A_1C_2)\equiv(D_1B_2) \Longrightarrow (GH)\equiv(FG) \Longrightarrow$EFGH este romb **1p**

$\Delta A_1C_2D \equiv \Delta D_1B_2C$ => $\widehat{A_1c_2D} \equiv \widehat{D_1B_2C}$

$m(\widehat{HGF}) = m(\widehat{HGD}) + m(\widehat{DGF}) = m(\widehat{A_1C_2D}) + 90^\circ - m(\widehat{D_1B_2C}) = 90^\circ$

=> EFGH este pătrat **1p**