COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU”
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

**Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”**
**ediţia a XIII-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018**
**CLASA a XI-a**

**Subiectul 1.**

Fie A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $A^n$, $n \geq 1$.

**Subiectul 2.**

**a)** Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}\cdot\cos\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n}\cdot\cos\sqrt{n}\right)$$

**b)** Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\left[\log_5\left(\sqrt[5^n]{2}+\sqrt[5^n]{3}+\sqrt[5^n]{4}+\cdots+\sqrt[5^n]{5^n+1}\right)\right]\right),$$

unde prin $[x]$ s-a notat parte întreagă a numărului real $x$.

**Subiectul 3.**

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere reale definit astfel $x_0 = 1$ și

$$x_{n+1} = \frac{3\cdot x_n + \sqrt{5\cdot x_n^2 - 4}}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătați că toți termenii șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ sunt numere întregi.

**Subiectul 4.**

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ și $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{x_n} + 1$, $\forall\, n \geq 2$.

**a)** Arătați că $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 3$, oricare ar fi $n \geq 2$.

**b)** Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_{n-1}}.$$

**c)** Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Notă:

1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU”
BAIA MARE



**Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”**
**ediţia a XIII-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018**
**BAREM DE CORECTARE CLASA A XI-A**

**Subiectul 1.**

Fie A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $A^n, n \geq 1$.

**Soluție:**

$$A = 2 \cdot I_3 + B,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(1p)}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n \geq 2,, \qquad \textbf{(1p)}$$

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (2 \cdot I_3)^{n-k} \cdot B^k = C_n^0 \cdot 2^n B^0 + C_n^1 \cdot 2^{n-1} \cdot B^1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot 2^{n-k} \cdot B^k$$
$$= 2^n I_3 + n \cdot 2^{n-1} \cdot B + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot 2^{n-k} \cdot B^2$$

**(2p)**

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 2^n & 3^{n+1} - (n+3) \cdot 2^n \\ 0 & 2^n & n \cdot 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{3p})$$

**Subiectul 2.**

**a)** Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1} \cdot \cos\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n} \cdot \cos\sqrt{n}\right)$$

**b)** Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \left[\log_5\left(\sqrt[5^n]{2} + \sqrt[5^n]{3} + \sqrt[5^n]{4} + \cdots + \sqrt[5^n]{5^n+1}\right)\right]\right),$$

unde prin $[x]$ s-a notat parte întreagă a numărului real $x$.

**Soluție:**

**a)** Notăm cu $x_n = \sqrt[3]{n+1} \cdot \cos\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n} \cdot \cos\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} \cdot cos\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n} \cdot cos\sqrt{n+1}$

Dacă $a_n = \sqrt[3]{n+1} \cdot \cos\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n} \cdot cos\sqrt{n+1} = cos\sqrt{n+1}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

$b_n = -\sqrt[3]{n} \cdot \cos(\sqrt{n}) + \sqrt[3]{n} \cdot cos\sqrt{n+1} = \sqrt[3]{n}(cos\sqrt{n+1} - \cos(\sqrt{n}))$ **(1p)**

Deci $x_n = a_n + b_n, \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(cos\sqrt{n+1}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n+1)}} \cdot \cos(\sqrt{n+1}\right) = 0$ **(1p)**

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}(cos\sqrt{n+1} - \cos\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} \cdot sin\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$

$|b_n| = 2\sqrt[3]{n} \cdot \left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right| \cdot 1 = 2\sqrt[3]{n} \cdot \left|\frac{\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right| = \frac{2\sqrt[3]{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \to 0$ **(1p)**

Finalizare **(0,5p)**

**b)** Din inegalitatea lui Bernoulli vom avea:

$$1 < \sqrt[5^n]{1+k} < 1 + \frac{k}{5^n}$$

$$\sum_{k=1}^{5^n} 1 < \sum_{k=1}^{5^n} \sqrt[5^n]{1+k} < \sum_{k=1}^{5^n} \left(1 + \frac{k}{5^n}\right)$$

$$5^n < \sum_{k=1}^{5^n} \sqrt[5^n]{1+k} < 5^n + \frac{5^n(5^n+1)}{2\cdot 5^n} \Longrightarrow 5^n < \sum_{k=1}^{5^n} \sqrt[5^n]{1+k} < \frac{(3\cdot 5^n+1)}{2} < 5^{n+1}$$

$$\Longrightarrow n < \log_5 \sum_{k=1}^{5^n} \sqrt[5^n]{1+k} < n+1$$

$$\Longrightarrow \left[\log_5\left(\sqrt[5^n]{2} + \sqrt[5^n]{3} + \dots + \sqrt[5^n]{5^n+1}\right)\right] = n$$ **(2p)**

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \left[\log_5\left(\sqrt[5^n]{2} + \sqrt[5^n]{3} + \sqrt[5^n]{4} \dots + \sqrt[5^n]{5^n+1}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$ **(1,5p)**

**Subiectul 3.**

Fie șirul $(x_n)$, un șir de numere reale definit astfel: $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{3\cdot x_n + \sqrt{5\cdot x_n^2 - 4}}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că toți termenii șirului sunt numere întregi.

**Soluție:**

$(2\cdot x_{n+1} - 3\cdot x_n)^2 = 5\cdot x_n^2 - 4 \Longrightarrow x_{n+1}^2 - 3\cdot x_n x_{n+1} + x_n^2 = -1, n \geq 0 \Longrightarrow$ **(1p)**

$x_{n+1}^2 - 3\cdot x_n x_{n+1} + x_n^2 - x_n^2 + 3\cdot x_n x_{n-1} - x_{n-1}^2 = 0 \Longrightarrow (x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} - 3\cdot x_n + x_{n-1}) = 0$ **(2p)**

Din ipoteză avem:

$$x_{n+1} = \frac{3\cdot x_n + \sqrt{5\cdot x_n^2 - 4}}{2} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{3\cdot x_n}{2} + \frac{\sqrt{5\cdot x_n^2 - 4}}{2} \geq \frac{3\cdot x_n}{2}$$

**(2p)**

$$x_{n+1} - x_n \geq \frac{3\cdot x_n}{2} - x_n = \frac{x_n}{2} > 0$$ **(1p)**

Deci $x_{n+1} - 3\cdot x_n + x_{n-1} = 0, \forall n \geq 1, x_0 = 1,\ x_1 = 2$, deci $x_n \in \mathbf{Z}$ demonstratie prin inducție matematică. **(1p)**

**Subiectul 4.**

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ și $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{x_n} + 1$, $\forall\, n \geq 2$.

**a)** Arătați că $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 3$, oricare ar fi $n \geq 2$.

**b)** Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_{n-1}}.$$

**c)** Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

**Soluție:**

**a)** **(2p)** Inducție după n

Pp că $x_{n-1}, x_n \in \left[\frac{3}{2}, 3\right] \to \frac{x_{n-1}}{x_n} + 1 \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{3}{2}$ și $\frac{x_{n-1}}{x_n} + 1 \leq 3 \cdot \frac{2}{3} + 1 = 3 \implies x_{n+1} \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$

b) Fie $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_{n-1}}, n \geq 2$

Din ipoteză avem

$$x_{n+1} \cdot x_n = x_{n-1} + x_n \;, n \geq 2$$
$$x_{n+2} \cdot x_{n+1} = x_n + x_{n+1}$$

Dacă scădem relațiile anterioare se obține:

$$x_{n+1}(x_{n+2} - x_n) = x_{n+1} - x_{n-1}$$ **(1p)**

Cum $x_{n+1} > 0$, atunci sgn$(x_{n+2} - x_n)$=sgn$(x_{n+1} - x_{n-1})$=...=sgn$(x_3 - x_1)$=sgn $\frac{1}{2}$

Rezultă că $x_{n+1} - x_{n-1} > 0, \forall\, n \geq 2$

$y_{n+1} - y_n = \frac{x_{n+2}}{x_n} - \frac{x_{n+1}}{x_{n-1}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} - x_{n+1}}{x_{n+1} \cdot x_n} < 0$, deci $(y_n)$ este descrescător și cum $(y_n) > 0$ deci $(y_n)$ este convergent **(1p)**

Cum $x_{n+1} > x_{n-1}$, atunci subșirurile $(x_{2n})$ și $(x_{2n-1})$ sunt strict crescătoare, deci sunt convergente.

Fie $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = l_1$ și $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = l_2$, $x_n \geq \frac{3}{2}$, rezultă $l_1, l_2 \geq \frac{3}{2}$

Dar, $y_{2n+1} = \frac{x_{2n+2}}{x_{2n}} \to \frac{l_1}{l_1}$=1 și , $y_{2n} = \frac{x_{2n+1}}{x_{2n-1}} = \frac{l_2}{l_2} \to 1$, deci $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$ **(1p)**

**b)** Presupunem că $(x_n)$ este convergent. Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = l, l \in \mathbb{R}$. **(1p)**

Trecând la limită în relația de recurență, *l* = 2 contradicție cu $(x_{2n})$ este strict crescător și că $x_2 = 2$ **(1p)**